

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XXII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Национален кръг на олимпиадата по астрономия

I тур – 20 април 2019 г., гр. Стара Загора

Възрастова група XI-XII клас – решения

1 задача. Горещи пиксели. По проект на Дружеството на невъзможните мечтатели е конструиран огромен космически телескоп с идеален във всяко отношение огледален обектив, който отразява 100% от лъчението, попадащо върху него. В главния му фокус е монтирана CCD матрица. Целта е да се видят протуберансите на звездата Проксима от Центавър. Изображението на Проксима върху матрицата е с диаметър 1 мм. Резултатът от наблюдението е катастрофален. Лъчението на звездата е разтопило петното от цифровата матрица с диаметър 1 мм, където е попаднало изображението.

- А) Какъв трябва да е бил диаметърът на огледалния обектив? Паралаксът на Проксима е $0.769''$ (дъгови секунди). Радиусът на звездата е 107300 km, а температурата 3040 K. Температурата на топене на силиция е 1414°C . Считайте, че CCD матрицата е монтирана върху подложка от идеално отразяващ материал, а разтопеният участък не обменя топлина със съседните части от матрицата.

- Б) Ако на мястото на CCD матрицата поставим тънък диск от волфрам с диаметър 1 мм, то ще можем ли да го нагреем до температурата на самата Проксима? А дали ще можем да го разтопим? Обосновете вашия отговор. Температурата на топене на волфрама е 3422°C .

- В) Посочете факторите, които ще повлияят на резултатите от подобни експерименти, ако се опитае да построим телескопа като използваме реално съществуващи технологии и материали.

Астрономическа единица: $1 \text{ AU} = 149.6 \times 10^6 \text{ km}$

Решение:

Първо ще намерим видимия ъглов диаметър δ на звездата Проксима. Нека p е паралаксът на звездата, r е разстоянието до нея, R е нейният радиус, а с $a = 149.6 \times 10^6 \text{ km}$ ще означим разстоянието от една астрономическа единица. Тогава:

$$r = \frac{1}{p} \approx 1.3 \text{ парсека}$$

$$\delta = p \cdot \frac{2R}{a} \approx 0.0011''$$

За да се получи изображение на Проксима с диаметър $d = 1 \text{ мм}$, фокусното разстояние на телескопа трябва да бъде:

$$F = \frac{d}{\delta} \approx 187 \text{ km}$$

Светимостта на Проксима е:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

където T е нейната температура, а σ е константата на Стефан. На разстояние r звездата създава осветеност:

$$E = \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2} \sigma T^4$$

Ако с D означим диаметъра на обектива, то осветеността, създавана от Проксима в рамките на нейното изображение в главния фокус ще бъде толкова пъти по-голяма от

осветеността върху обектива на телескопа, колкото пъти площта на този обектив е по-голяма от площта на изображението на звездата:

$$E_1 = E \cdot \frac{D^2}{d^2} = \frac{D^2}{d^2} \cdot \frac{R^2}{r^2} \sigma T^4$$

Ако предположим, че материалът, от който е направена CCD матрицата, има нулева отражателна способност, то той ще се нагрява дотогава, докогато потокът от неговото излъчване се изравни с потока енергия E_1 , попадаща върху него от звездата. Ако искаме това да се случи при температурата на топене на силиция T_{Si} , то първо от градуси по Целзий я превръщаме в келвини и трябва да се изпълни равенството:

$$E_1 = \sigma T_{Si}^4$$

Оттук за диаметъра на огледалото получаваме:

$$D = d \cdot \frac{r}{R} \cdot \left(\frac{T_{Si}}{T} \right)^2$$

$$D \approx 115 \text{ km}$$

Ако в главния фокус на огледалото поставим тънък диск от волфрам и искаме да го нагреем до температурата на Проксима, то отново осветеността от звездата трябва да се изравни с потока излъчване от диска:

$$E_1 = 2\sigma T^4$$

С коефициента 2 отчитаме това, че дискът излъчва и от двете си страни. За диаметъра на телескопа получаваме:

$$D_W = d \cdot \frac{r}{R} \sqrt{2}$$

$$D_W \approx 529 \text{ km}$$

Този диаметър е около 2.8 пъти по-голям от фокусното разстояние на телескопа.

Да означим с T_W температурата на топене на волфрама, която също превръщаме в келвини. За да разтопим волфрамовия диск, диаметърът на огледалото трябва да е:

$$D_{W1} = d \cdot \frac{r}{R} \cdot \left(\frac{T_W}{T} \right)^2 \sqrt{2}$$

$$D_{W1} \approx 781 \text{ km}$$

Това е над 4 пъти по-голямо от фокусното разстояние на огледалото. Такъв обектив не е възможно да се построи от геометрична гледна точка, ако става въпрос за сферично огледало, но огледалото може да е параболично.

Реалното изпълнение на подобни експерименти няма да даде резултатите, до които достигнахме тук. Първо, засега поне е много трудно да се направи такова огромно огледало, което при това да има съвършената форма и гладкост, изпълнени с фантастична точност. Освен това, както и да направим огледалото, то няма да е напълно свободно от оптически аберации. Не съществува огледално покритие със 100% отражателна способност, при това за всички дължини на електромагнитните вълни. Силициевата цифрова матрица също ще отразява част от попадналия върху нея светлинен поток, а друга част ще пропуска. Същото важи и за волфрамовия диск. Много ще бъде трудно да се контролира позицията в пространството на матрицата или диска, така че да останат точно в главния фокус на огромния телескоп. В крайна сметка температурата, която ще се постигне в главния фокус на огледалото, ще е значително по-ниска от пресметнатите тук стойности. Що се отнася в частност до разтопяването на

волфрама, можем да си припомним едно следствие от втория принцип на термодинамиката, според което не е възможно да нагреем даден обект до температура по-висока от температурата на източника на енергия, който използваме.

Критерии за оценяване (общо 14 точки):

За определяне на фокусното разстояние на обектива – 2 т.

За правилна математическа постановка на решението за диаметъра на огледалото – 4 т.

За правилно решение за разтопяването на петно от CCD камерата – 1 т.

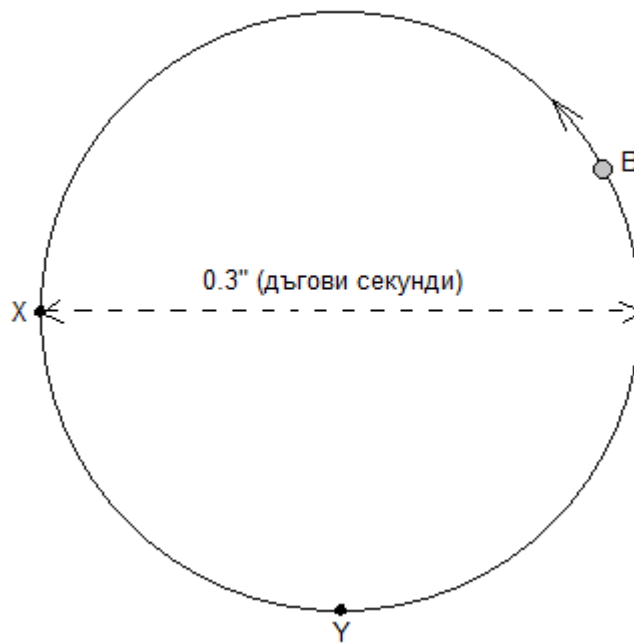
За правилно решение за загряването на волфрамовия диск до температурата на Проксима – 1 т.

За правилно решение за разтопяването на волфрамовия диск – 1 т.

За заключение относно възможността да се построи такова огледало – 1 т.

За посочване на факторите, които ще повлияят в реална ситуация – 4 т.

2 задача. Хипотетична двойна звезда. Двойна звездна система се състои от компонента А, която е черна дупка, и компонента В – звезда с 2 пъти по-малка маса от черната дупка. Орбиталният период на системата е 50 години.



На фигурата е представена видимата относителна орбита на компонентата В около компонентата А, построена по данни от наблюдения. Паралаксът на системата е $0.03''$ (дъгови секунди).

Наблюдаваната лъчева скорост на звездата В в точка Х е 8 km/s . Стойността е с въведени корекции, чрез които се премахва влиянието на движението на двойната система като цяло относно нас.

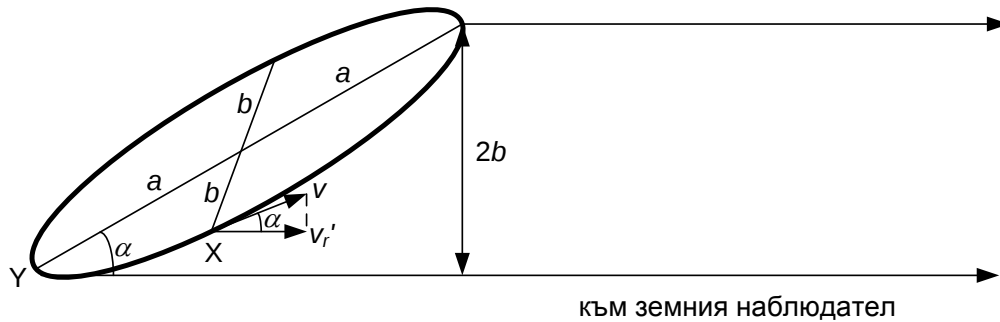
Черната дупка е с неизвестно положение, защото не се вижда.

Известно е също, че в точка Y орбиталното движение на звездата В е най-бързо.

- А) Определете масите на двете звезди.
- В) Пресметнете времето, за което компонентата В изминава пътя от точка Х до точка Y.

Решение:

От дадената ни фигура се вижда, че наблюдаваната относителна орбита на звездата около черната дупка е окръжност. Но звездата се движи неравномерно и това означава, че истинската орбита е елипса, която се проектира върху небесната сфера за земния наблюдател като окръжност. Ако елипсата има голяма полуос a и малка полуос b , то както се вижда от схемата по-долу, проектираната окръжност ще има диаметър $2b$.



Даден ни е паралаксът на двойната система $p = 0.03''$. Това означава, че на разстоянието от нас до системата отсечка с дължина 1AU се вижда под ъгъл $0.03''$. Видимият ъглов диаметър на проектираната орбита е $\delta = 0.3''$. Следователно в астрономически единици:

$$2b = \frac{\delta}{p} = 10 \text{ AU}$$

Така определяме малката полуос на действителната относителна орбита:

$$b = 5 \text{ AU} \quad (1)$$

Означаваме с v скоростта на движение на компонентата В по относителната елипса около черната дупка, а с v_r' – нейната проекция по зрителния лъч към земния наблюдател. Наблюдаваната от нас лъчева скорост v_r обаче, ще бъде проекция на скоростта на звездата относно центъра на масите на системата (считаме, че системата като цяло не се движи относно Земята). Ако означим масите на компонентите А и В съответно с M_A и M_B , а техните скорости относно центъра на масите на системата с v_A и v_B , то в сила са съотношенията:

$$\begin{aligned} M_A &= 2M_B \\ M_A v_A &= M_B v_B \\ v &= v_A + v_B \end{aligned}$$

От тези уравнения намираме:

$$v = \frac{3}{2} v_B$$

За „лъчевата скорост“ относно компонентата А можем да напишем:

$$v_r' = \frac{3}{2} v_r = 12 \text{ km/s} \quad (2)$$

Относителната скорост v , чиято проекция е v_r' , е скоростта на компонентата В в точка от елипсата, която е в края на малката полуос. Както е известно, тази скорост е равна на кръговата скорост на движение около същия гравитационен център по орбита с радиус, равен на голямата полуос a . Можем да напишем:

$$v = \frac{2\pi a}{T} \quad (3)$$

където T е даденият ни орбитален период.

От схемата се вижда също и следното:

$$\sin \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$v = \frac{v_r'}{\cos \alpha} = \frac{v_r'}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} \quad (4)$$

От (1), (2), (3) и (4) получаваме:

$$a = \sqrt{\frac{v_r'^2 T^2}{4\pi^2} + b^2}$$

$$a \approx 20.76 \text{ AU}$$

Накрая, за да намерим масите на двете компоненти, използваме III закон на Кеплер:

$$\frac{a^3}{T^2} = M_A + M_B$$

където голямата полуос е изразена в астрономически единици, орбиталният период в години, а масите в слънчеви маси.

$$M_A + M_B \approx 3.58 \text{ слънчеви маси}$$

Следователно черната дупка има маса $M_A \approx 2.4$ слънчеви маси, а масата на звездата, или компонентата В е $M_B \approx 1.2$ слънчева маса.

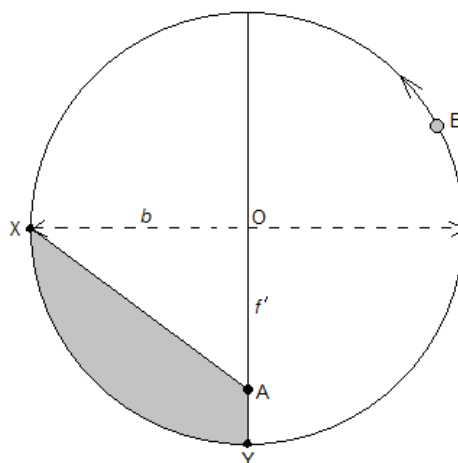
Вече можем да определим и фокусното разстояние f на относителната елиптична орбита, а оттам – положението на черната дупка:

$$f = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$f \approx 20.14 \text{ AU}$$

За да намерим за колко време компонентата В ще измине дъгата ХУ, ще използваме II закон на Кеплер. Трябва да пресметнем каква част от цялата площ на елиптичната орбита е площта, описана от радиус-вектора на звездата В от точката Х до точката У. Но можем да опростим нашите изчисления. В проекцията на орбитата, която наблюдаваме, отношението на площите се запазва същото, каквото е при действителната орбита. Ето защо ще пресметнем съответното отношение на площите в проектираната орбита. На фигурата по-долу f' е проекцията на фокусното разстояние на елиптичната орбита:

$$f' = f \sin \alpha = f \frac{b}{a}$$



Пресмятаме лицето на триъгълник АОХ:

$$S_1 = \frac{1}{2} b f' = \frac{f b^2}{2a}$$

Защрихованата фигура е проекция на фигурата, описвана от радиус-вектора на звездата. Площта на тази проекция е:

$$S = \frac{1}{4}\pi b^2 - S_1 = b^2 \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{f}{2a} \right)$$

Времето, за което звездата В изминава пътя от точка X до точка Y ще бъде:

$$t = T \cdot \frac{b^2 \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{f}{2a} \right)}{\pi b^2} = T \left(\frac{1}{4} - \frac{f}{2\pi a} \right)$$

$$t \approx 4.87 \text{ години}$$

Критерии за оценяване (общо 14 точки):

За правилна обща представа за разположението на действителната орбита относно наблюдателя – 2 т.

За определяне на малката полуос на елипсата чрез паралакса – 1 т.

За отчитане на факта, че наблюдаваната лъчева скорост е скорост относно центъра на масите и привезждането ѝ към система, свързана с черната дупка – 2 т.

За правилен метод за определяне на масите на двете компоненти – 4 т.

За верни числени стойности на масите – 1 т.

За правилен начин за определяне на времето за изминаване на разстоянието между точките X и Y – 3 т.

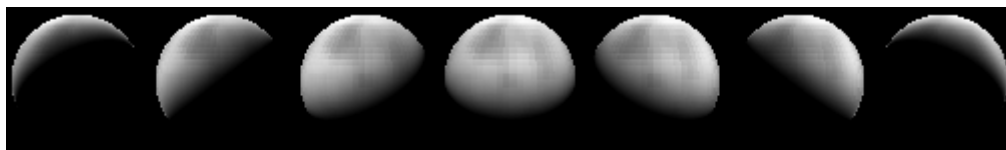
За верен числен резултат – 1 т.

3 задача. Небето на Плутон. Ако обичате романтичните разходки нощем по пълнолуние, не ви препоръчваме да се преселите на Плутон. Пълнолунията на най-големия спътник Харон там се случват рядко. Поредицата от изображения по-долу показва как протича цикълът на смяна на фазите на Харон за наблюдател на Плутон през различни години. Разполагате с карта, на която е отбелязан видимият път на Плутон на фона на звездното небе при наблюдение от Земята, както и с още една звездна карта. Орбиталният период на Плутон около Слънцето е 248 години. Орбитата на Харон лежи в екваториалната равнина на Плутон.

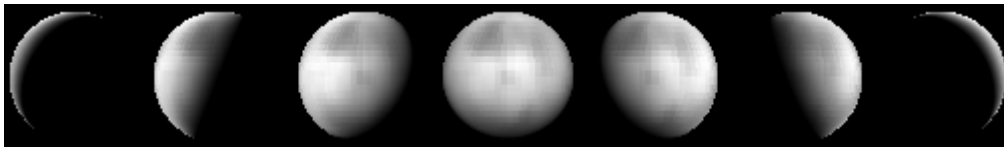
- А) Използвайте дадените ви изображения и определете приблизително ъгъла, който оста на Плутон сключва с равнината на неговата орбита.

- Б) Определете в кое съзвездие се намира северният небесен полюс на Плутон. Обяснете своите разсъждения.

Знаем, че Плутон има обратно околоосно въртене. Но под северен небесен полюс тук ще разбираме небесния полюс, който се намира в северната еклиптична полусфера. В същия смисъл ще дефинираме и северното полукълбо на Плутон, откъдето наблюдателят би виждал фазите на Харон по показания начин.



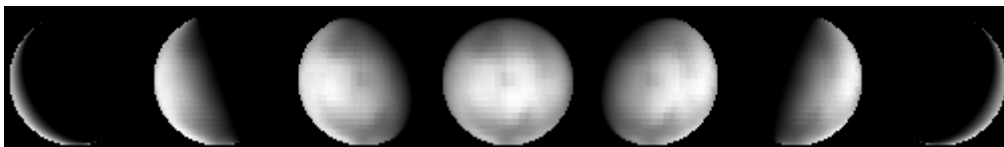
Фазите, които е показвал Харон през 1930 г.



Фазите, които е показвал Харон през 1978 г.



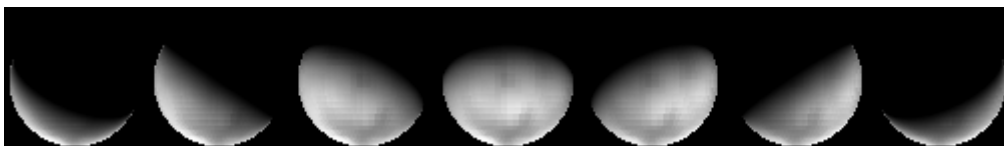
Фазите, които е показвал Харон през 1988 г.



Фазите, които е показвал Харон през 1996 г.



Фазите, които е показвал Харон през 2010 г.



Фазите, които ще показва Харон през 2030 г.

Решение:

Екваторът на Плутон е със значителен наклон към равнината на неговата орбита около Слънцето, а орбитата на Харон лежи в екваториалната равнина на Плутон. Поради тези обстоятелства от повърхността на Плутон истински пълнолуния на Харон могат да се наблюдават само около моментите на пролетно и есенно равноденствие за Плутон. В останалото време през периодите на смяна на фазите на Харон, спътникът достига до някаква максимална фаза, която далеч не е пълна, и после тя започва отново да намалява до тънък сърп. Сериите изображения на Харон показват, че около 1988 г. е било едно от равноденствията. През 1930 г. максималната фаза, до която е стигал Харон, се е отличавала най-силно от пълнолунието. Ако около тази година е било едно от слънцестоянията за Плутон, то между 1930 и 1988 г. трябва да има четвърт орбитален период на Плутон, или $248 / 4 = 62$ години. В действителност от 1930 г. до 1988 г. има

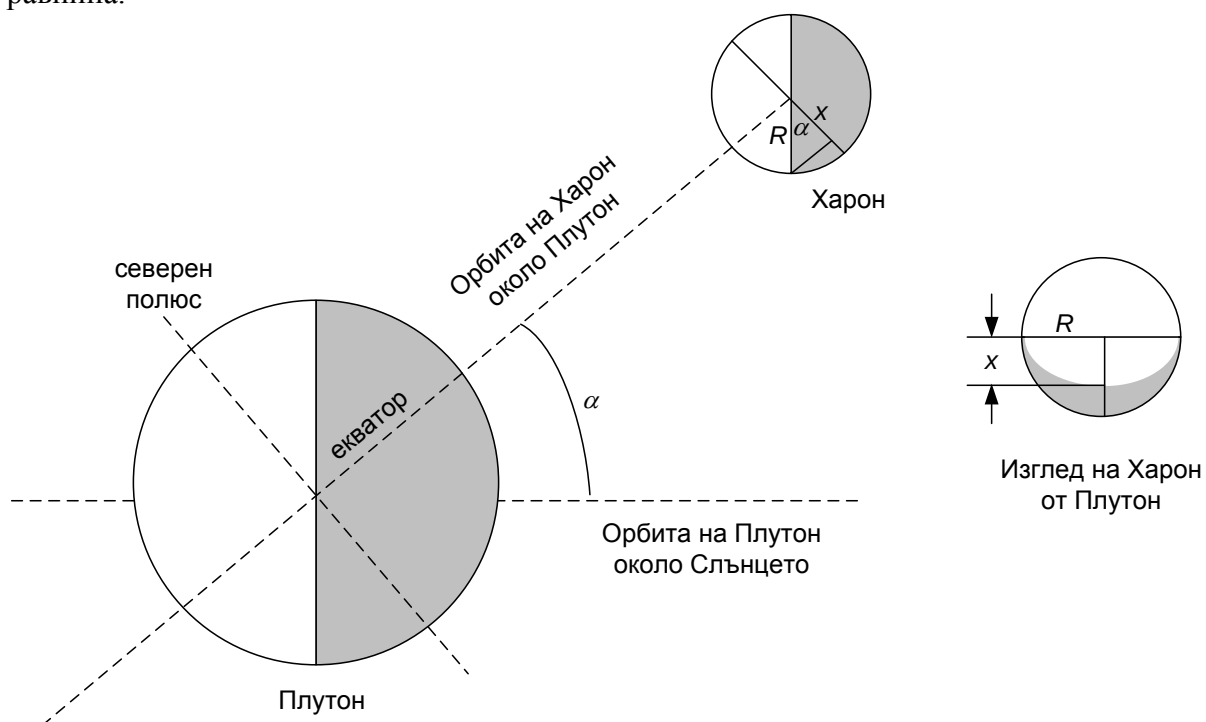
58 години, което на пръв поглед е недостатъчно. Но от друга страна на картата с видимия път на Плутон е отбелязано, че в 1989 г. той е бил в перихелий. Следователно в тази част от орбитата си той се е движил по-бързо около Слънцето. Ето защо слънцестоянието трябва да е било в момент доста близък до 1930 г.

Върху средното изображение на Харон от серията за 1930 г. измерваме радиуса на спътника R и отсечката x . Както се вижда от схемата, от отношението на тези отсечки можем да намерим ъгъла α , който е равен на ъгъла на наклона на екватора на Плутон към неговата орбита около Слънцето. Получаваме:

$$\cos \alpha = \frac{x}{R}$$

$$\alpha \approx 57^\circ$$

Оттук следва, че оста на Плутон е наклонена на $90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$ към орбиталната му равнина.



Сега остава да установим накъде е ориентирана оста на Плутон. Земята е много близо до Слънцето в сравнение с мащабите на орбитата на Плутон. Когато гледаме към Плутон от Земята, това е до голяма степен същото, както ако гледаме Плутон от Слънцето. Нека си представим, че сме в центъра на Слънчевата система, а панорамата на пътя на Плутон по небето е извита на 200° около нас. От схемата по-горе се убеждаваме, че когато Плутон е бил в позицията си около 1930 г., неговият северен полюс е бил огряван от Слънцето. Следователно тогава е било лятното слънцестояние за северното полукуълбо на Плутон. Оттук заключаваме, че ако се обърнем в диаметрално противоположната посока, ще видим северния небесен полюс на Плутон, който ще отстои на около 33° северно от проекцията на неговата орбита върху небесната сфера. Разглеждайки лявата крайна част на картата с пътя на Плутон по звездното небе, ние виждаме, че неговият северен небесен полюс е някъде в посока от звездата Нунки от Стрелец към съзвездието Орел. Справката с картата на звездното небе ни помага да заключим, че северният небесен полюс трябва да се намира в съзвездието Делфин.

Критерии за оценяване (общо 14 т.):

За разбиране на причините, поради които само около равноденствията може да има истинско пълнолуние на Харон – 3 т.

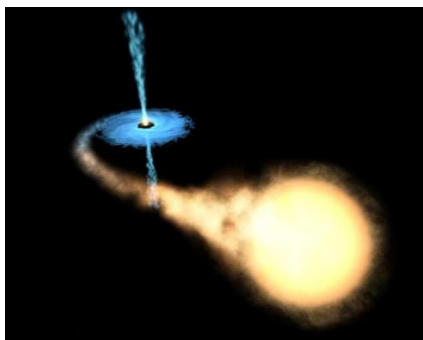
За обосноваване на избора на изображението на Харон през 1930 г., по което да се извършат измерванията – 3 т.

За измервания и определяне на наклона на оста на Плутон към орбиталната му равнина – 3 т.

За правилни разсъждения относно позицията на северния небесен полюс – 4 т.

За определяне на съзвездието, където той се намира – 1 т. ако е посочено съзвездието Делфин, или 0.5 т., ако е посочено някое от съседните съзвездия.

4 задача. Обектът SS 433. През 1977 г. в съзвездието Орел е открит необикновеният обект SS 433, който вече десетилетия наред се изследва от астрономите.



Това е двойна система от звезда от спектрален клас А и компактен обект, за който все още не е ясно дали е неутронна звезда или черна дупка. Вещество от звездата изтича към компактния обект и образува акреционен диск, а перпендикулярно на равнината на диска в две противоположни посоки се изхвърлят мощни струи. Дискът извършва прецесия с период 163 дни.

В спектъра на обекта се наблюдават компоненти на линиите, породени от двете струи, които показват периодично изменящо се доплерово отместване. То се дължи на прецесията на диска. Дадена ви е диаграма с кривите на отместването на спектралните линии, представено чрез параметъра $z = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0$ където λ и λ_0 са съответно наблюдаваната и лабораторната дължина на вълната. Поради огромната скорост на веществото в струите, при наблюдение на обекта се проявява ефект, който произтича от Специалната теория на относителността и е свързан със забавянето на времето.

- А) Като използвате диаграмата, намерете скоростта на движение на веществото в струите.

- Б) Определете ъгъла на наклона на струите към оста на прецесията, както и ъгъла, който оста на прецесията сключва със зрителния лъч към земния наблюдател.

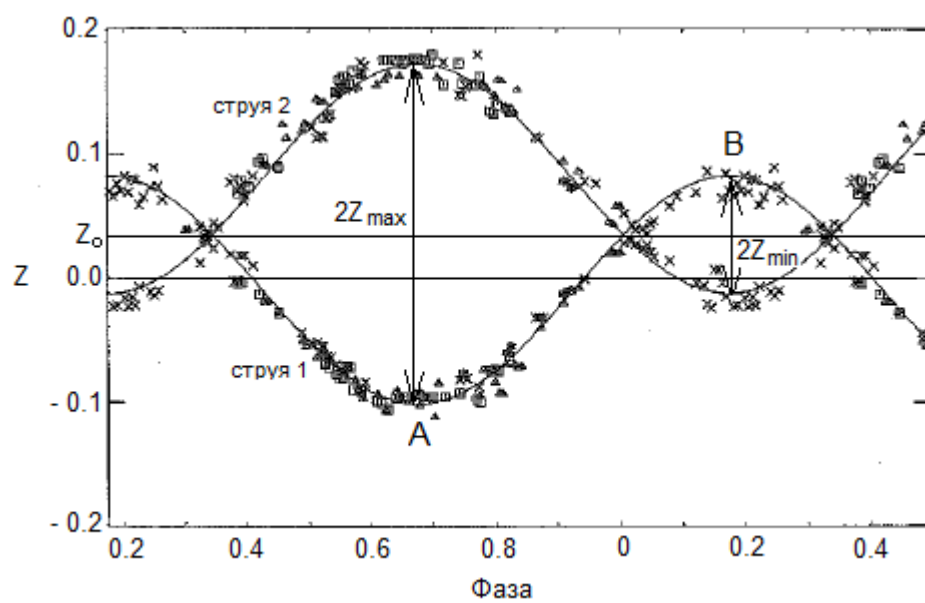
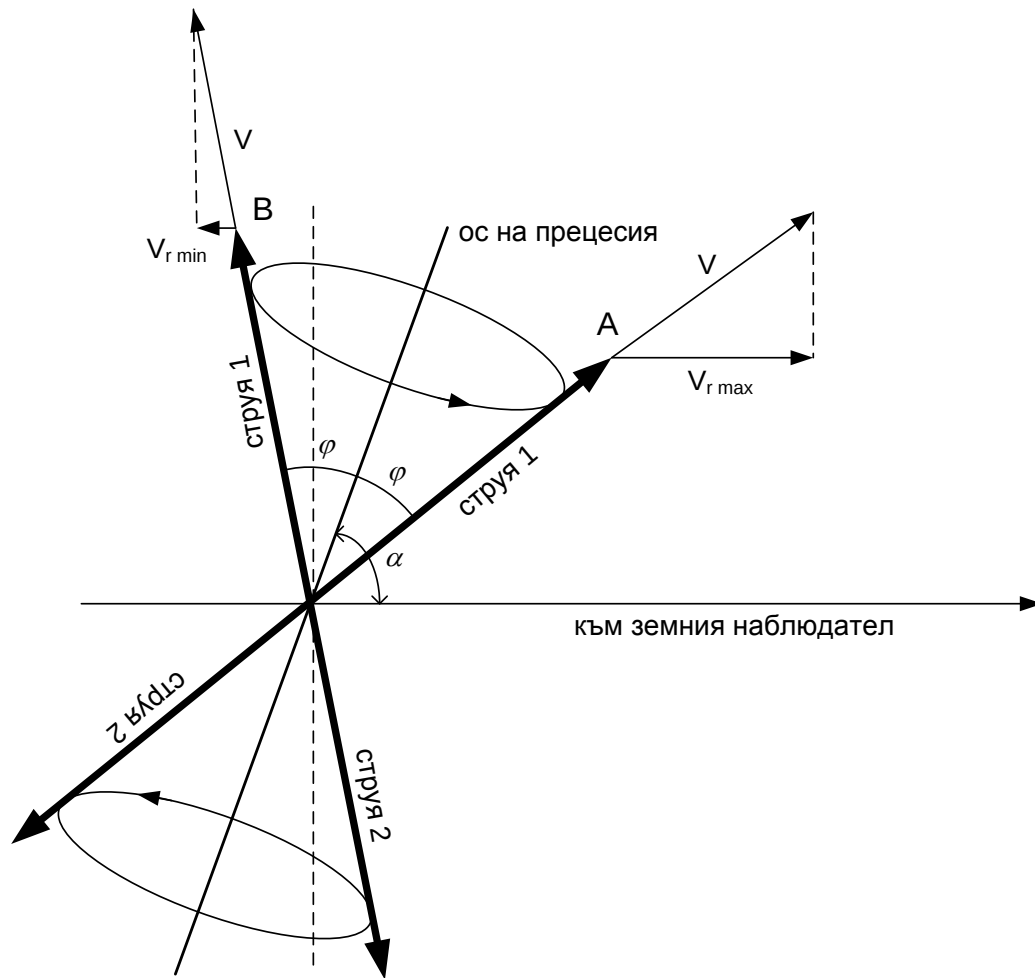
Считайте, че скоростта на движение на компактния обект спрямо земния наблюдател е пренебрежимо малка. Релативистична формула за ефекта на Доплер:

$$\frac{v_r}{c} = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}$$

Решение:

Схемата, дадена по-долу, илюстрира прецесията на двете противоположно насочени струи, които се изхвърлят от централната част на акреционния диск около обекта SS433. С v е означена скоростта на движение на веществото в струите. Симетричността на кривите на доплерово отместване показва, че тази скорост е еднаква за двете струи. Поради прецесията наравлението на струите относно земния наблюдател се променя с времето и затова се променя лъчевата скорост, а оттам и доплеровото отместване, което астрономите са регистрирали. На схемата с А и В са означени позициите на струя 1, които съответстват на точките А и В върху диаграмата на

доплеровото отместване. С $v_{r \max}$ и $v_{r \min}$ са означени съответните лъчеви скорости. При струя 2 ситуацията може да се опише по аналогичен начин.



Лъчевата скорост, регистрирана от земния наблюдател, става равна на нула, когато съответната струя е перпендикулярна на зрителния лъч. Моментите, когато това се случва, трябва да съответстват на пресечните точки на кривите на доплеровото отместване за струите 1 и 2. От графиката се вижда обаче, че пресечните точки са при стойност на доплеровото отместване:

$$z_0 \approx +0.0354$$

Тази стойност намираме чрез определяне на мащаба на графиката на доплеровото отместване и измерване. Тук именно се проявява ефектът от Специалната теория на относителността. Веществото в струите се движи с огромна скорост и ние би трябвало да наблюдаваме забавено протичане на времето при всички физически процеси в това вещество, включително и при излъчването на електромагнитни вълни. Нека с T означим периода на електромагнитна вълна с дължина λ относно координатна система, свързана с движещото се вещество в струите. За земния наблюдател обаче, този период ще бъде:

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

където c е скоростта на светлината. От друга страна:

$$z_0 = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{cT' - cT}{cT} = \frac{T' - T}{T}$$

От тези две равенства получаваме:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + z_0)^2}}$$

$$v \approx 78000 \text{ km/s}$$

По-нататък чрез измервания по диаграмата получаваме доплеровите отмествания z_{max} и z_{min} , които се наблюдават при лъчевите скорости $v_{r \max}$ и $v_{r \min}$:

$$z_{max} \approx 0.139$$

$$z_{min} \approx 0.042$$

Пресмятаме съответните лъчеви скорости:

$$v_{r \max} = c \cdot \frac{(1 + z_{max})^2 - 1}{(1 + z_{max})^2 + 1}$$

$$v_{r \max} \approx 38800 \text{ km/s}$$

По аналогичен начин получаваме:

$$v_{r \min} \approx 12300 \text{ km/s}$$

Да означим с α ъгъла между оста на прецесия на струите и зрителния лъч за земния наблюдател, а с φ ъгъла на наклона на струите към оста на прецесия. В сила са следните равенства:

$$\cos(\alpha - \varphi) = \frac{v_{r \max}}{v}$$

$$\cos(180^\circ - \alpha + \varphi) = \frac{v_{r \min}}{v}$$

Оттук получаваме:

$$\alpha - \varphi \approx 60.05^\circ$$

$$180^\circ - \alpha + \varphi \approx 80.91^\circ$$

Накрая намираме:

$$\varphi \approx 19.5^\circ$$

$$\alpha \approx 80^\circ$$

Критерии за оценяване (общо 14 т.):

За правилна представа относно разположението на струите спрямо нас при прецесията и връзката на положенията на струите със съответните участъци от диаграмата на доплеровото отместване – 2 т.

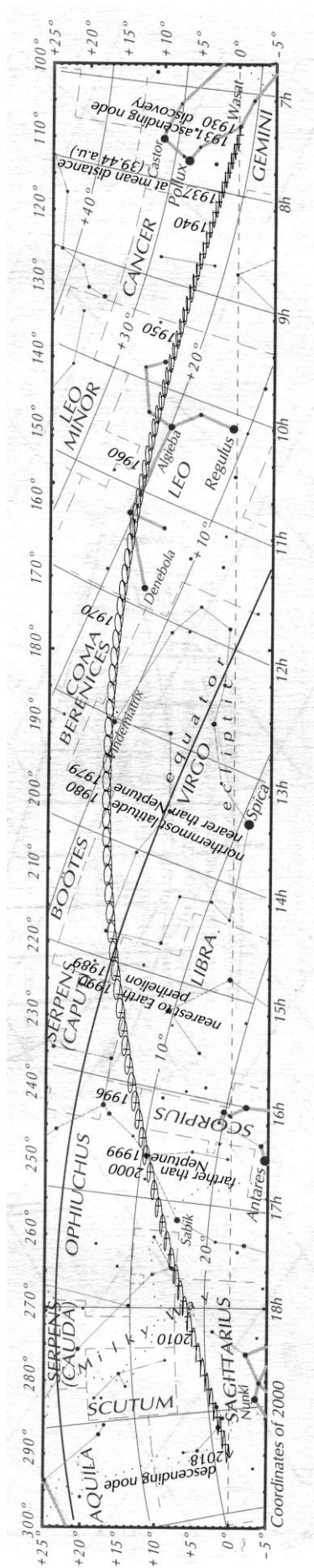
За обяснение на отместването на кривите по диаграмата като резултат на релативистичния ефект на забавяне на времето – 2 т.

За правилен метод за намиране на скоростта на движение на веществото в струите, измерване и пресмятане – 3 т.

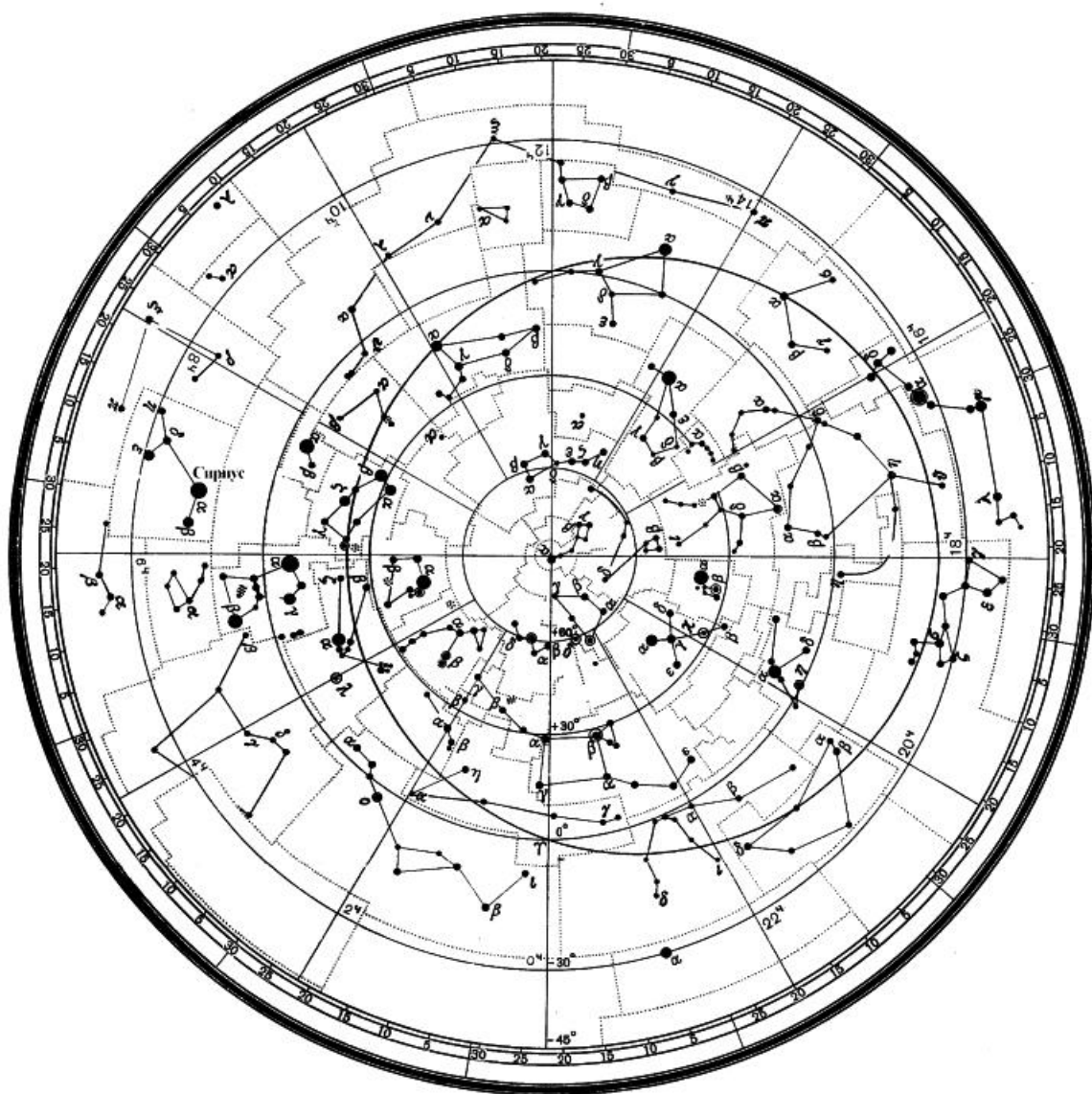
За вярна члена стойност – 1 т.

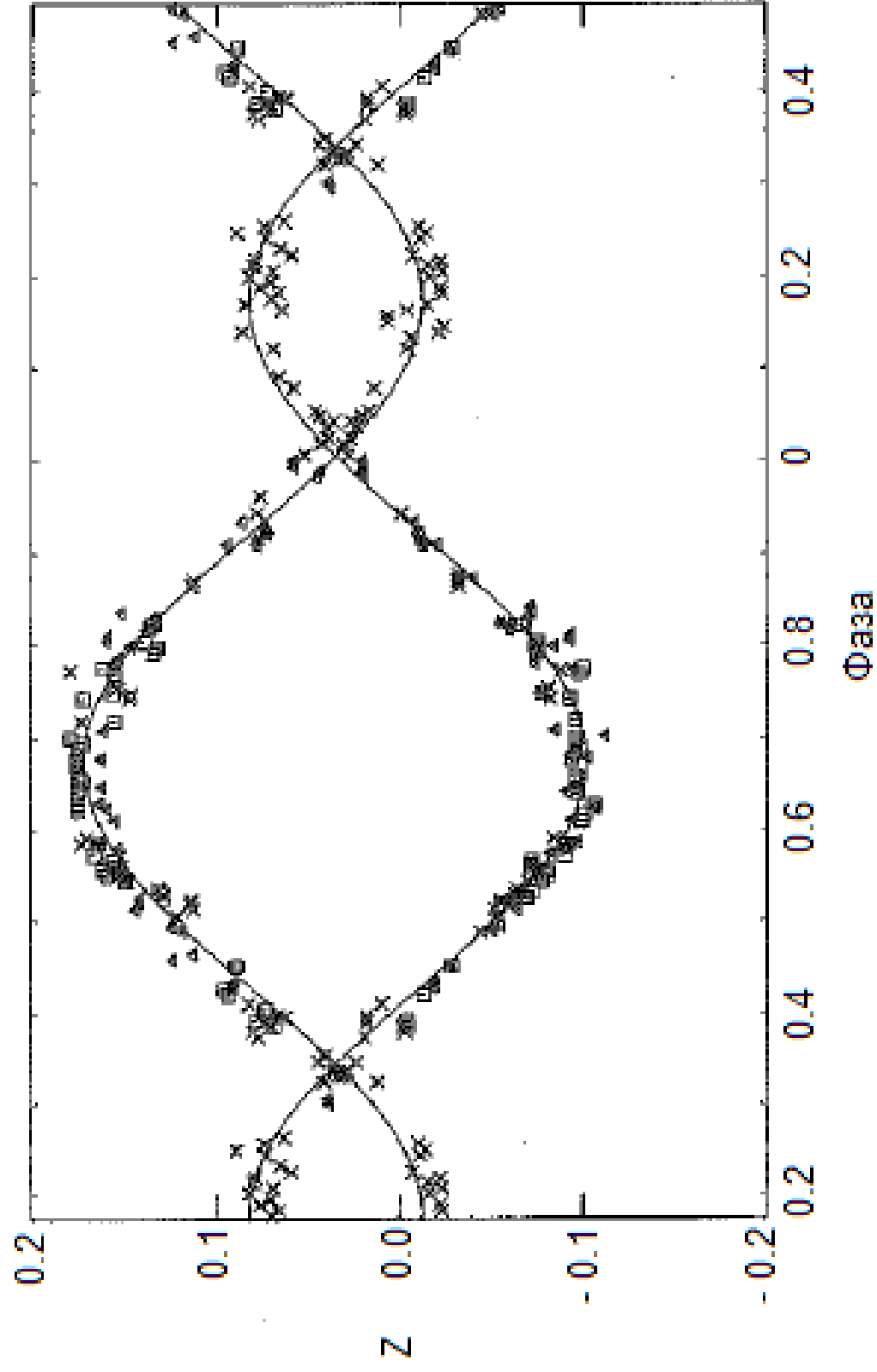
За правилен метод за определяне на ъглите, измерване и пресмятане – 4 т.

За правилни числени отговори – 2 т.



Видимият път на Плутон.



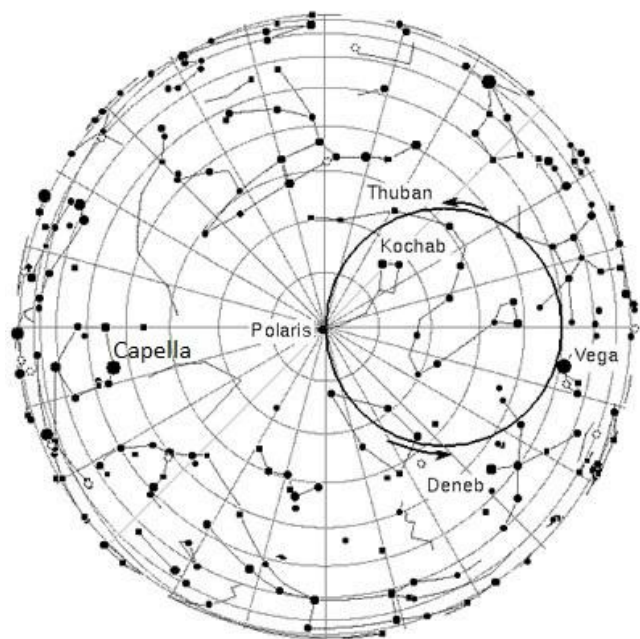


Криви на отместването на спектралните линии в излъчването на струите вещество, изхвърлени от обекта SS 433.

XXII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ
19-21 април 2019 г., Стара Загора

Тест 11-12 клас – решения

1. В: Видимият път на северния небесен полюс спрямо звездите изглежда така:



The path of the precession of the Earth's rotation axis.
It takes 26,000 years to complete a full 360° wobble.

2. В: Повече от половината от потвърдените (към април 2019 г.) 4023 екзопланети са открити по метода на транзитите.

3. А: Обектите на Herbig-Haro са малки мъглявини в региони на звездообразуване, формирани от сблъсъка на изхвърлената материя от джетовете на младите звезди с газовия облак, в който се намират.

4. С: CNO-цикълът е основният механизъм за синтез на водород в хелий в ядрата на масивните звезди. При маломасивните звезди основният механизъм е протон-протонната верига.

5. D: От изброените звезди само Сириус А е на главната последователност.

Втората най-ярка звезда на нощното небе Канопус е A9II свръхгигант.

RR Lyr е прототип на променливите от този тип: пулсиращи гиганти (клас светимост III)

η Aql е първата открита класическа цефеида (клас F6I)

Мира е пулсиращ AGB гигант (средно M7III), прототип на дългопериодичните пулсиращи хладни гиганти.

6. В: Интервалът от време между две последователни преминавания на Луната през перигея на орбитата е аномалистичен месец.

7. D: Приносът на гравитационното привличане на Меркурий е 532"/век. Приносът на ефектите от Общата теория на относителността е 43"/век. Останалите посочени ефекти са пренебрежими.

8. D: Класическите цефеиди са масивни свръхгиганти, които са прекалено млади, за да бъдат в кълбовидни звездни купове. Останалите посочени обекти се наблюдават в кълбовидни купове, с изключение на черните дупки със средна маса (IMBH), за които има много свидетелства и очакват потвърждение. Звездите с температура 7500 K са над точката на обръщане, но се формират при обмен на материя в гъстия куп (т.нар. blue stragglers).

9. 2 **1т.:** 1.9-2.1

От III Закон на Кеплер

$$a^3/P^2 = GM/4\pi^2$$

$$P \sim (a^3/M)^{1/2}$$

Сравнявайки със Земята получаваме $P = 2$ yr

10. 4.84 **1т:** 4.55-5.15 **0.5т:** 3.5-6.0

Разстоянието е $r[\text{pc}] = 1/\pi'' = 40.98$ pc

Модулът на разстоянието е

$$m-M = 5\lg(40.98)-5 = 3.063 \text{ mag}$$

Абсолютната визуална звездна величина $M_V = m_V - (m-M) = -1.413 \text{ mag}$

Абсолютната болометрична звездна величина е $M = M_V - BC_V = -2.463 \text{ mag}$

Светимостта L в слънчеви светимости намираме от Закона на Pogson като абсолютната болометрична звездна величина на Слънцето е $M_{\text{sol}} = +4.75$:

$$M = M_{\text{sol}} - 2.5\lg(L/L_{\text{sol}})$$

$$L = 768 L_{\text{sol}}$$

От закона на Стефан-Болцман намираме радиуса R :

$$(L/L_{\text{sol}}) = (R/R_{\text{sol}})^2 (T/T_{\text{sol}})^4$$

Фотосферната температура на Слънцето е $T=5770\text{ K}$ и отговорът е $R/R_{\text{sol}} = 4.84$

11. 26 **1т.:** 15-40 **0.5т:** 10-50

В условието е дадена грубата зависимост $R \sim M^{0.8}$ за звезди от главната последователност. Но кафявите джуджета не са звезди и тази зависимост не може да се използва!

Кафявите джуджета са субзвездни обекти. Разликата е, че те не са запалили всички термоядрени реакции в ядрото си, за да се синтезира ${}^4\text{He}$ от водородни ядра. Тъй като няма мощен източник на енергия в ядрото, при повишаване на масата техният радиус не се увеличава. За голям интервал от маси той е константен – почти колкото радиуса на Юпитер (70 000 km).

За даденото типично кафяво джудже с $40M_J$ можем да пресметнем радиуса от $\rho = 3M/(4\pi R^3) \Rightarrow R = 64\,000\text{ km}$ или около $0.9 R_J$

Оттук можем да заключим, че кафяво джудже с $20M_J$ ще има радиус между 0.9 и 1 Юпитерови радиуса. *(Всъщност, може и да е съвсем малко повече)*

При радиус $1R_J$ се получава 26 g/cm^3 и това е стойност, близка до реалната.

При радиус $0.9R_J$ се получава 36 g/cm^3 и това също е допустима стойност.

12. 79 **1т:** 74-86 **0.5т:** 60-100

Енергията на преход от 2-ро на n-то ниво е $E = \text{const}(1/2^2 - 1/n^2)$

Енергията на фотона е $E = hc/\lambda$

Отношението на дължините на вълните на H δ и H α е

$$\lambda_0/6562.8\text{ \AA} = (1/2^2 - 1/3^2)/(1/2^2 - 1/6^2)$$

Получава се $\lambda_0 = 4101.75\text{ \AA}$ и червено отместване $z = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0 = 0.0533$

От $z = v_R/c$ (ефект на Доплер за $z \ll 1$) и $v_R = Hr$ (закон на Хъбъл, $H = 70\text{ (km/s)/Mpc}$) се получава разстояние до галактиката $r = 228\text{ Mpc}$

Линейният размер на галактиката получаваме като $d = \delta r = 79\text{ kpc}$

13. 1.5 **1т.:** 1.49-1.51

Скаларният фактор $a = 1/(1+z)$ дава отношението на размера на голям елемент от пространството при по-малка възраст на Вселената спрямо размера на същия елемент в наши дни. Наблюдавайки Вселената такава каквато е била в миналото, виждаме разстояния, намалени с фактор $1+z$, което важи и за дължината на вълната на фотон, идващ от там.

На възраст на Вселената, наблюдавана като $z = 1$ скаларният фактор е $1/(1+1) = 1/2$

На възраст на Вселената, наблюдавана като $z = 4$ скаларният фактор е $1/(1+4) = 1/5$

Отношението на двата скаларни фактора е 2.5, т.е. Вселената при $z = 1$ е 2.5 пъти по-голяма от Вселената при $z = 4$. Ако гледаме по-далечната галактика, когато възрастта на Вселената съответства на $z = 1$ (наблюдавано от днес), ще виждаме пространството назад в миналото намалено $1+z$ пъти. Тоест, за търсеното z важи $1+z = 2.5$
 $z = 1.5$

14. 68 **1т.:** 64-72 **0.5т:** 60-85

Наблюдателна задача.

Ректасцензията на точката е звездното време + 12 h.

Деклинацията на точката е 90 – географската ширина.

Точката не е далече от северния галактичен полюс в Косите на Вероника, на 68° галактична ширина.